

פרק 2. מערכות מסדר ראשון

- 2.1 נקודת הראות הגיאומטרית.
- 2.2 תכונות כלליות של מסלולי מערכת מסדר ראשון.
- 2.3 ביפורקציות
- 2.4 דוגמאות פיסיקליות

2.1. נקודת הראות הגיאומטרית

אנו דנים במערכת מסדר ראשון: $\dot{x} = f(x)$, $x(t) \in \mathbb{R}$, כאשר $f(x)$ פונקציה רציפה.

דוגמא: $\dot{x} = \sin(x)$, $x(0) = x_0$

ניתן לפתור ע"י הפרדת משתנים: $dt = dx / \sin(x) = \csc(x) dx$

$$t = \int \csc(x) dx = -\ln |\csc(x) + \cot(x)| + C$$

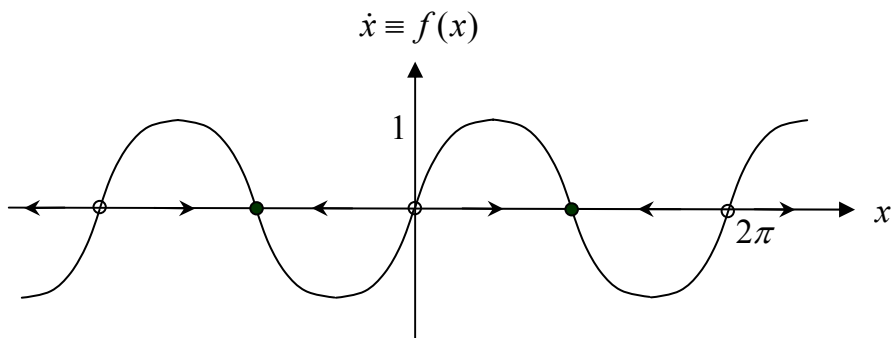
$$t = \ln \left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right|$$

למרות שזהו פתרון מדויק, קשה להסיק ממנו מסקנות איכותיות, כגון:

א. עבור $x_0 = 1$, מהו אופי הפתרון המתקבל? בפרט, מהי ההתנהגות עבור $t \rightarrow \infty$?

ב. עבור x_0 כלשהו, מהי ההתנהגות הפתרון $x(t)$ כאשר $t \rightarrow \infty$?

הפתרון לשאלות איכותיות מעין אלה מתקבל באופן פשוט על ידי ניתוח גיאומטרי של המערכת. נתבונן בציור הבא:



בנוסף לפונקציה $f(x)$, מתואר בציור גם כיוון השינוי של $x(t)$, הנקבע לפי סימן $f(x)$. הנקודות המסומנות בעיגול הן הנקודות הסטציונריות (או נקודות שיווי משקל) של המערכת, שבהן $f(x) = 0$.

ניתן לראות מהציור כי:

- א. קיימים שני סוגים של נקודות שיווי משקל, המסומנים בעיגול מלא וריק, בהתאמה: (1) נקודות ש"מ יציבות (הנקראות גם *sinks* או *attractors*), שאליהן מסלולי הפתרון מתכנסים. (2) נקודות ש"מ לא-יציבות (הנקראות גם *repellers* או *sources*), שמהן המסלולים מתרחקים.
- ב. מסלול המתחיל בנקודה $x_0 = 1$ נע ימינה במהירות (\dot{x}) הולכת וגדלה עד $x = \pi$, משם המהירות קטנה עד להגעה (אסימפטוטית) לנקודת ש"מ יציבה $x = 2\pi$.
- ג. באופן דומה ניתן לנתח התנהגות המסלול לכל נקודת התחלה.

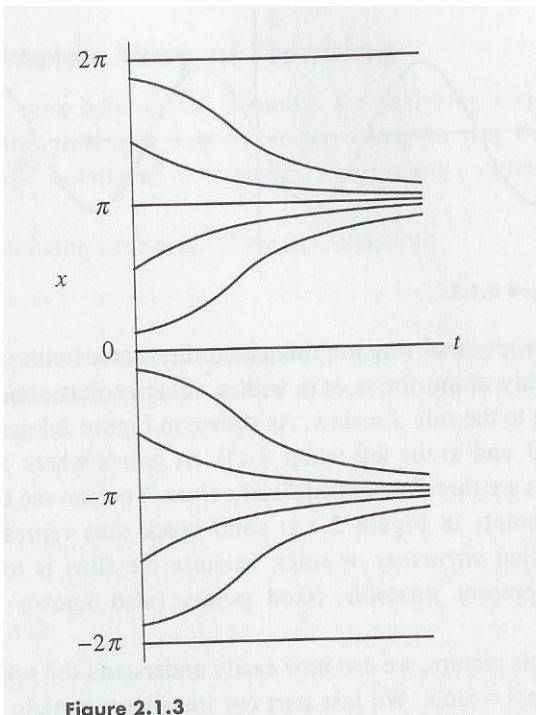


Figure 2.1.3

מסלולי המערכת המתקבלים עבור תנאי התחלה שונים מוראים בציור (מתוך הספר של Strogatz). התנהגותם האיכותית תואמת את התאור הנ"ל.

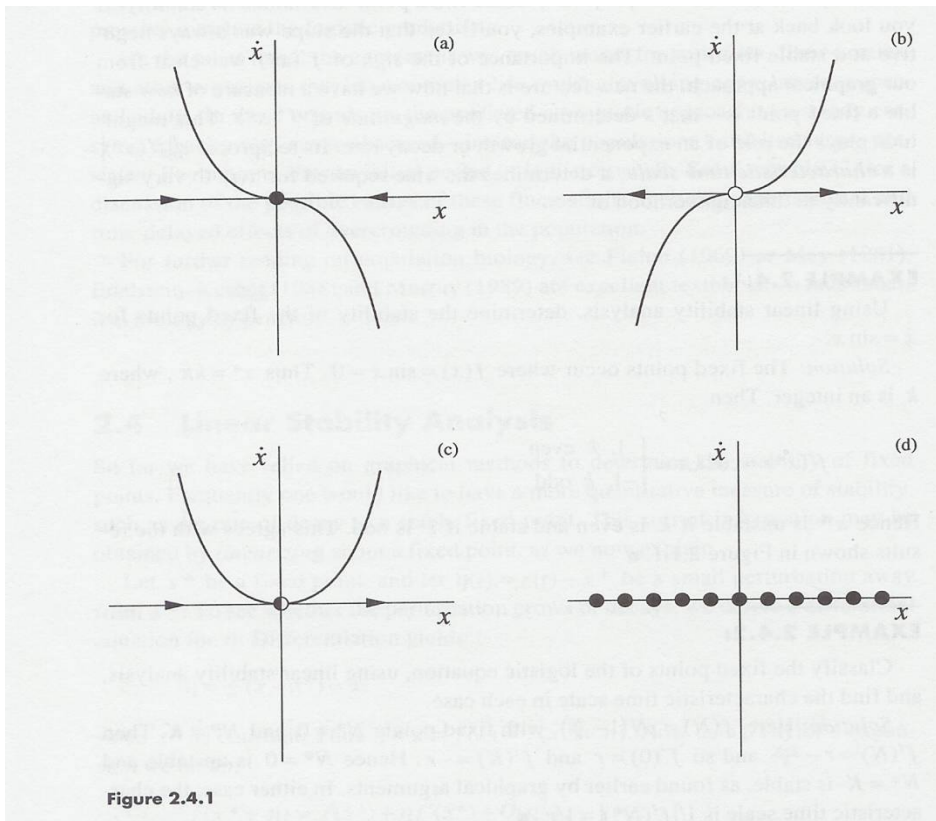
באופן כללי, ניתן להבחין בסוגים הבאים של נקודות שיווי משקל (נש"מ) מבודדות, כמודגם בציור להלן :

א. נש"מ יציבה דוגמא : ציור (a), $\dot{x} = -x^3$.

ב. נש"מ לא יציבה - דוגמא : ציור (b), $\dot{x} = x^3$.

ג. נש"מ יציבה-למחצה - דוגמא : ציור (c), $\dot{x} = x^2$.

בנוסף קיימות אפשרות לרצף של נקודות שיווי משקל, כמוראה ציור (d). לא נעסוק בסיווג נש"מ מסוג זה.



2.2. תכונות כלליות של מסלולי מערכת מסדר ראשון

טענה : עבור מערכת מסדר ראשון (עם $f(x)$ רציפה), המסלולים $x(t)$ תמיד מונוטוניים בזמן (עולים או יורדים).

הוכחה : אם $f(x_0) = 0$, המסלול קבוע. אם $f(x_0) > 0$, אזי עקב רציפות $f(x)$ אינו יכול לשנות סימן אלא ע"י מעבר דרך $f(x) = 0$, ובמקרה זה המסלול ישאר שם. המקרה $f(x_0) < 0$ דומה.

מתכונה בסיסית זו נובעות, בפרט, התכונות הבאות :

- א. לא ייתכנו תנודות במערכת.
- ב. המסלולים מתכנסים לנש"מ, או מתבדרים לאינסוף.

ברור מכאן כי מגוון ההתנהגויות האפשרי עבור מערכת נתונה הינו מצומצם למדי. נושא עשיר יותר הינו שינוי התנהגות המערכת כתלות בפרמטרים, שיתואר בהמשך.

2.3. ביפורקציות

ביפורקציה (פיצול) הינה שינוי איכותי באופי המערכת החל עקב שינוי בפרמטרי המערכת. תופעה זו הינה בסיסית ביותר במערכות פיסיקליות. נשתמש פה במקרה הפשוט של מערכת מסדר ראשון כדי להדגים את אופי תופעת הביפורקציה.

א. ביפורקציית אוכף (saddle node)

ביפורקציית זו הינה המנגנון העיקרי להיווצרות והיעלמות נש"מ. הדוגמא הקנונית של ביפורקציית אוכף נתונה ע"י המערכת הבאה (מסדר ראשון)

$$\dot{x} = r + x^2$$

כאשר r פרמטר ממשי. עבור ערכים שונים של r מתקבלת דיאגרמת נקודות ש"מ כלהלן:

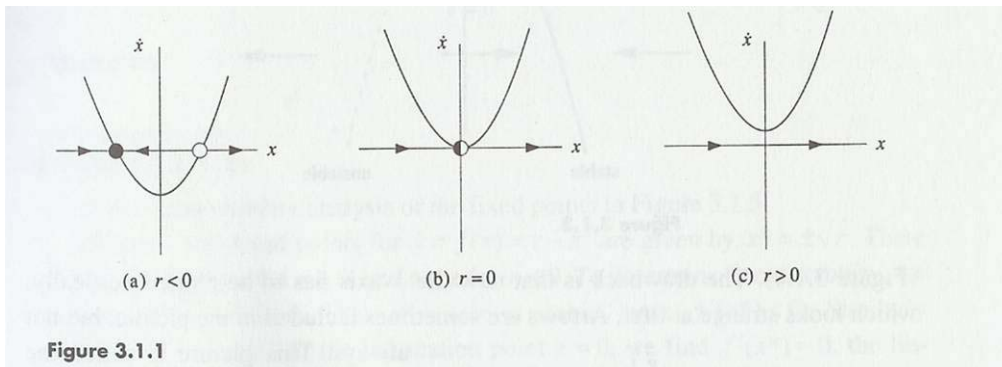


Figure 3.1.1

עבור $r < 0$ קיימות שתי נקודות ש"מ, יציבה ולא-יציבה.
 עבור $r = 0$ שתיהן מתלכדות לנש"מ יציבה-למחצה (אוכף).
 עבור $r > 0$ אין כלל נש"מ (ולפיכך המסלולים מתבדרים).

דרך מקובלת להציג את השינוי בנש"מ הינה באמצעות דיאגרמת הביפורקציה הבאה:

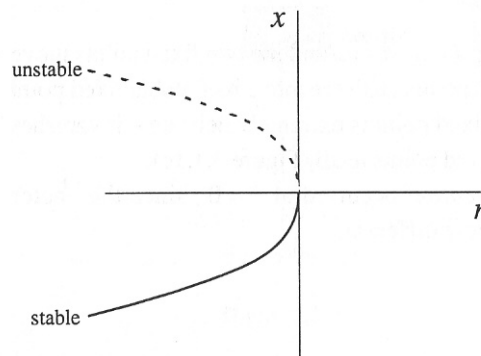


Figure 3.1.4

נעיר כי הדוגמא $\dot{x} = r + x^2$ מייצגת, במובן מסויים את כל הביפורקציות מסוג אוכף במערכות מסדר ראשון, במובן שהתנהגותן המקומית (בסביבת הביפורקצייה) ניתנת לקרוב ע"י המערכת הריבועית. דוגמא זו (יחד עם המערכת הסימטרית $(\dot{x} = r - x^2)$ נקראת הצורה הנורמלית של ביפורקציית אוכף. נביא להלן את הצורות הנורמליות של מספר ביפורקציות נוספות.

ב. ביפורקצייה טרנס-קריטית

במערכות פיסיקליות מסויימות נש"מ קיימת לכל ערכי הפרמטר, אם כי היא עשויה לשנות את יציבותה. מצב זה מתואר על ידי ביפורקצייה טרנס-קריטית, המיוצגת ע"י המערכת $\dot{x} = rx - x^2$. התאור הגרפי הינו כלהן:

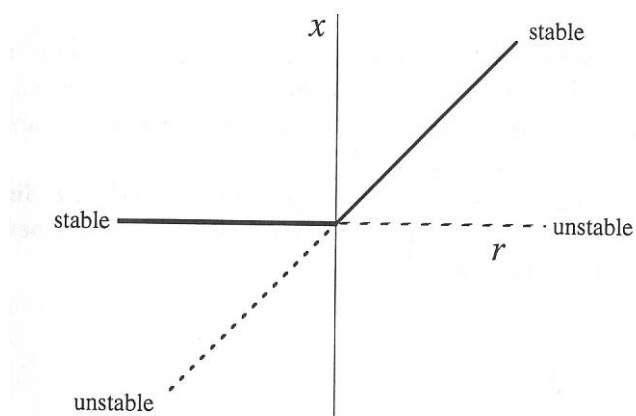
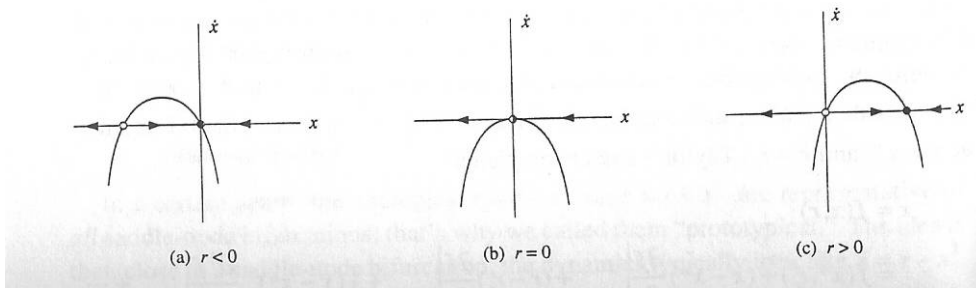


Figure 3.2.2

ג. ביפורקציית קלשון (pitchfork)

ביפורקצייה זו מאפיינת מערכות בעלות סימטריה מרחבית. למעשה קיימות פה שתי אפשרויות :

ביפורקציית קלשון על-קריטית : $\dot{x} = rx - x^3$

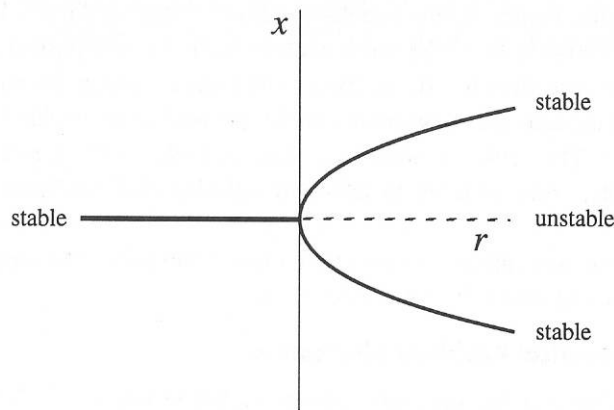
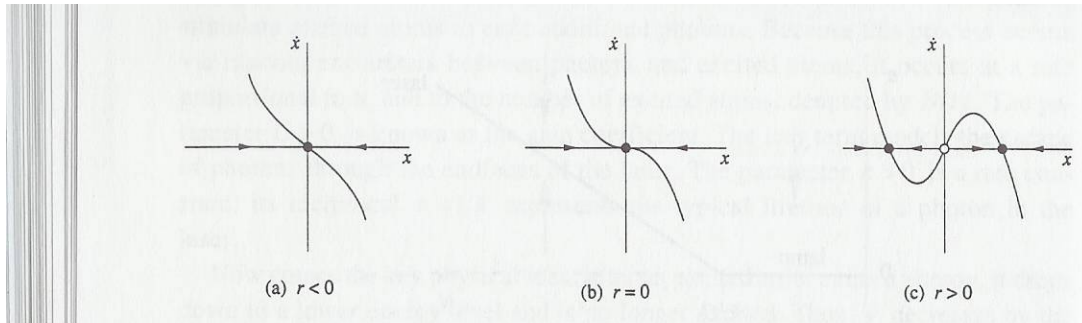


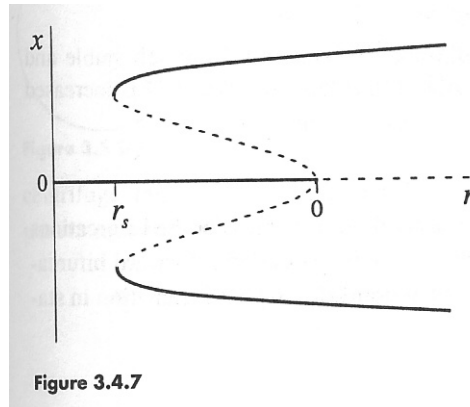
Figure 3.4.2

ביפורקציית קלשון תת-קריטית : $\dot{x} = rx - x^3$

במקרה זה שתי נש"מ הנגרמות ע"י הגורם מסדר שלישי הינן בלתי יציבות. תרגיל : שרטט את דיארמת הנש"מ ודיאגרמת הביפורקציה המתאימות למקרה זה.

ד. ביפורקציות משולבות

במערכות פיסיקליות ניתן למצוא לעתים קרובות שילוב של מספר ביפורקציות מהסוג שתואר. לדוגמא, עבור המערכת $\dot{x} = rx - x^3 + x^5$ נקבל את דיאגרמת הביפורקציה הבאה :

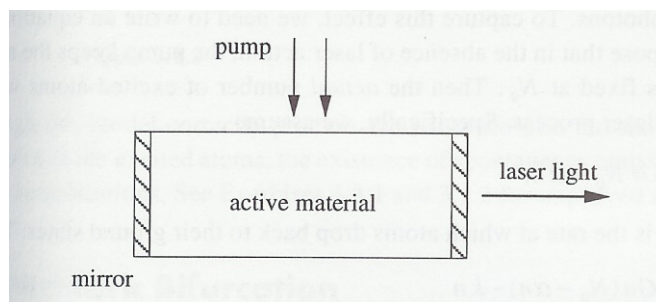


במערכת זו ניתן לראות תופעות כגון "קפיצה" מנש"מ יציבה לאחרת עם שינוי הפרמטר, וכן תופעת היסטריזיס : התנהגות שונה עבור הורדה והעלאה של הפרמטר.

2.4. דוגמאות פיסיקליות

א. מערכת לייזר

נתאר את עקרון הפעולה ומודל פיסיקלי ממושט ביותר להתקן זה. מקור אנרגייה חיצוני מעביר ("שואב") אטומים למצב אנרגטי מעורר, והאטומים חוזרים למצב הבסיס תוך פליטת פוטונים בתדר מסויים. בשאיבה חלשה, הפליטה היא של אור "רגיל" (לא קוהרנטי). כאשר אנרגיית השאיבה עוברת סף מסויים, מתרחשת תופעת הלזידה – האור הופך קוהרנטי ועוצמתו עולה.



נסמן ב- $n(t)$ את מספר הפוטונים בחלל הלייזר, וב- $N(t)$ את מספר האטומים המעוררים. אזי

$$\dot{n} = \text{gain} - \text{loss} = GnN - kn$$

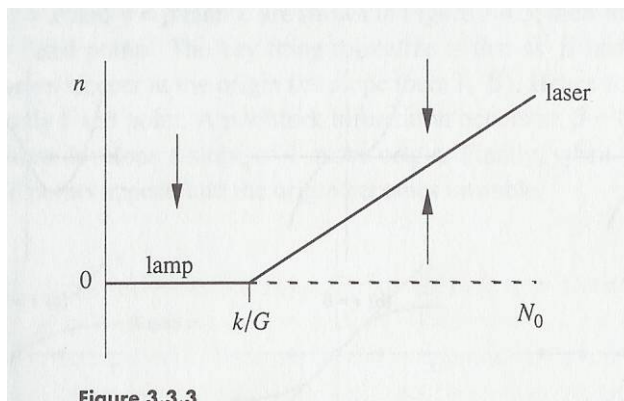
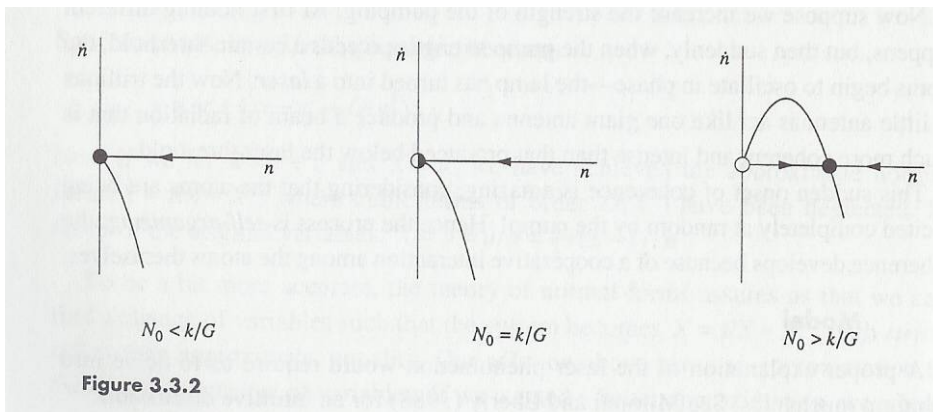
האיבר הראשון נובע מפליטה מאולצת: פוטונים הפוגשים אטומים מעוררים גורמים להם לפליטת פוטון נוסף, כאשר $G > 0$ הוא מקדם ההגבר. האיבר השני נובע מבריחת הפוטונים מהלייזר.

$$N(t) = N_0 - \alpha n(t) \quad \text{נניח בנוסף כי:}$$

כאשר N_0 כמות האטומים המעוררים ע"י השדה החיצוני, והאיבר השני מייצג את הירידה במספרם עקב הפליטה המאולצת. ע"י הצבה נקבל משוואה מסדר ראשון עבור \dot{n} :

$$\dot{n} = Gn(N_0 - \alpha N) - kn = (GN_0 - k)n - \alpha Gn^2$$

כאשר מעלים את N_0 (רמת השאיבה), ניתן לראות כי מתקבלת ביפורקציה טרנס-קריטית עבור $N_0 = k/G$ (סף הלזירה). התהליך מודגם בציורים הבאים.



ב. חרוז על חישוק סובב

בדוגמא הבאה נתבונן ב"חרוז" המולבש על חישוק סובב. המהירות הזוויתית ω של החישוק הינה קבועה. בהנחה של חיכוך ויסקוזי (יחסי למהירות) עם מקדם b , משוואת התנועה עבור זווית החרוז ϕ הינה:

$$mr\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg \sin \phi + mr\omega^2 \sin \phi \cos \phi$$

זוהי משוואה ממעלה שנייה. נבצע ניתוח מקורב עבור המקרה שבו מקדם ההשפעה המרסנת של החיכוך גדולה: ניתן להראות כי עבור $b \gg m\sqrt{gr}$ איבר האנרציה קטן, כך שבקרום מתקבלת משוואה ממעלה ראשונה:

$$\dot{\phi} = \beta \sin \phi (\gamma \cos \phi - 1)$$

כאשר $\beta = mg/b$, $\gamma = r\omega^2/g$.

נקודות ש"מ ויציבות נתונות בתרשימים הבאים. ניתן לראות כי עבור $\gamma < 1$ (מהירות סיבוב נמוכה) הנש"מ היציב הוא בראשית. כאשר המהירות עוברת ערך קריטי ($\gamma > 1$) הראשית הופכת לא-יציבה, ומתווספות נש"מ יציבות מחוץ לראשית.

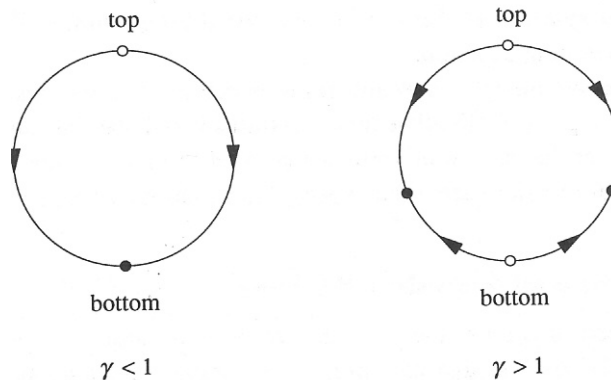


Figure 3.5.5

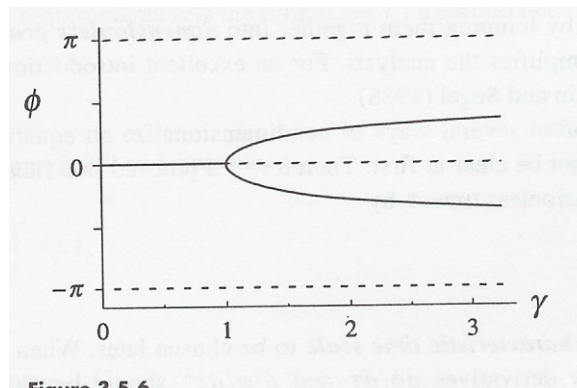


Figure 3.5.6

ניתן לראות כי הציור מתאר ביפורקציית קלשון על-קריטית.