שערוך וזיהוי במערכות דינמיות

גיליון תרגילים 1

להגשה ב- 14/4/16

שערוך סטטיסטי (חזרה)

1. נתונה המדידה $z = x + v$, כאשר x ו- v מ"א בלתי-תלויים סטטיסטית, x מפולג אחיד על פני הקטע החצוי $[0,2]\cup[4,6]$, ואילו v מפולג אחיד בקטע $[0,1]$. חשבו את המשערכים הבאים עבור x: LS, MMSE, LMMSE, ML, MAP.

2. הוכיחו את עקרון הניצבות עבור משערך לינארי בעל שגיאה ריבועית מינימלית (עמ' 2-10 בהרצאות).

3. בבעיית השיערוך הבייסיאני של וקטור מקרי x מתוך מדידה z, הראו כי עבור שלושת הקריטריונים הבאים מתקבל משערך זהה:

א. $\min_{\hat{x}} E[(x-\hat{x})^T M(x-\hat{x}) \mid z]$, כאשר M מטריצה סימטרית חיובית מוגדרת ($M > 0$).

ב. $\min_{\hat{x}} \text{trace}\{P\}$, כאשר $P = E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T \mid z]$

ג. $\min_{\hat{x}} \text{trace}\{MP\}$, כאשר M ו- P כאמור לעיל.

4. שרשרת מרקובית בזמן בדיד הינה תהליך מרקוב (x_k), בעל מרחב מצב סופי: $x_k \in \{1,2,\ldots,M\}$. עבור שרשרת מרקובית סטציונרית, דינמיקת התהליך מתוארת באופן מלא על ידי מטריצת הסתברויות המעבר $\{p_{ij}\}$:

$$p_{ij} = P(x_{k+1} = j \mid x_k = i), \quad i, j = 1,\ldots,M \ .$$

עבור שרשרת מרקובית בעלת פרמטרים לא ידועים, נצפתה סדרת המצבים $\{x_0, x_1, \ldots x_N\}$.
חשבו את משערך ML של הסתברויות המעבר. (רמז: התוצאה מאוד "הגיונית". שימו לב שאת המכסימיזציה על מרחב הפרמטרים יש לבצע תוך התחשבות באילוצים הטבעיים על $\{p_{ij}\}$).

5. משתנה אקראי x מפולג לפי פונקציית צפיפות הסתברות מטיפוס Gaussian Mixture:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x)$$

כאשר $p_i = N(\bar{x}_i, \sigma_i^2)$, ו- $\sum \alpha_i = 1$.
נתון בנוסף $z = x + v$, כאשר $v \sim N(0,1)$ מ"א בלתי תלוי ב- x.

א. תנו פירוש הסתברותי למשתנה האקראי x.

ב. חשבו את הפילוג המותנה $p(x \mid z)$, תוך הסתמכות על תוצאות מוכרות למשתנים גאוסיים.

6. פילוג דיריכלה k-מימדי עם פרמטרים חיוביים $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ מוגדר על ידי צפיפות ההסתברות:

$$p_\alpha(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha)}\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{\alpha_i-1} & : \quad \theta_1,\ldots\theta_k>0,\ \sum_{i=1}^{k}\theta_i=1\\ 0 & : \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

כאשר $B(\alpha)$ קבוע נרמול. ניתן להראות כי $E(x_i)=\alpha_i/\sum_{j=1}^{k}\alpha_j$.

משפחת פילוגי הסתברות $\{p(\theta)\}=\{p_\alpha(\theta):\alpha\in A\}$ (משפחת פילוגים במשתנה θ ופרמטר α) ומשפחה של פילוגים מותנים (פונקציות סבירות) $\{p(y\,|\,\theta):\theta\in\Theta\}$ נקראות צמודות (conjugate) זו לזו באם: הפילוג הפוסטריאורי $p(\theta\,|\,y)$ נמצא במשפחה $\{p(\theta)\}$ במידה והפילוג האפריורי $p(\theta)$ נמצא במשפחה זו.

א. הראו כי משפחת הפילוגים הגאוסיים (במימד נתון) צמודה למשפחת הפילוגים המותנים הגאוסיים בעלי וקטור ממוצעים θ ומטריצת קווריאנס נתונה.

ב. הראו כי משפחת פילוגי דיריכלה צמודה לפילוג (המותנה) של משתנה אקראי בדיד (המקבל אחד מהערכים $1,\ldots,k$ בהסתברויות $\theta_1,\ldots\theta_k$ בהתאמה). מהו הפרמטר α המתקבל עבור הפילוג האפוסטריאורי?

ג. הראו כי הראו כי משפחת פילוגי דיריכלה צמודה למשפחת הפילוגים (המותנים) המולטינומיאליים, אשר מתקבלת על ידי N מדידות בלתי תלויות של המשתנה הבדיד הנ"ל. מהו הפרמטר α המתקבל עבור הפילוג הפוסטריאורי?

ד. בהינתן N מדידות מהמשתנה הבדיד בסעיף ב', חשבו את משערך MMSE המתקבל עבור ההסתברויות $\theta_1,\ldots\theta_k$ כאשר מניחים כי הפילוג האפריורי עבורן הוא דיריכלה עם פרמטר α.. השוו את התוצאה למשערך הסבירות המירבית עבור בעיה זו.

<u>מסנן וינר (סופי \ לא סיבתי)</u>

7. נתון תהליך המדידה: $y_k=s_k+n_k$, כאשר n_k ו- s_k אותות בלתי-תלויים בזמן בדיד בעלי פונקציות קווריאנס:

$$R_s(k)=10\cdot(0.5)^{|k|},\quad R_n(k)=\delta(k)$$

א. מצאו את מסנן וינר הבלתי-סיבתי הסיבתי לבעיה זו. חשבו (מספרית) את שגיאת השיערוך (MSE).

ב. ציירו את תגובת התדר של המסנן. הסבירו עקרונית את צורתה לאור התכולה התדרית של האות והרעש.

8. א. עבור הבעייה מהשאלה הקודמת, נדרש לחשב את מסנן ה-FIR האופטימאלי מהצורה:

$$\hat{s}_k=\sum_{i=0}^{N}h_i y_{k-i}$$

רשמו המשוואות לחישוב המקדמים האופטימאליים. חשבו (מספרית) את שגיאת השערוך עבור $N=0,1,\ldots,N_0$ (עם N_0 מתאים לבחירתכם), ציירו, והשוו בקצרה למסנן וינר.

ב. חיזרו על הסעיף הקודם עבור מסנני FIR מהצורה: $\hat{s}_k=\sum_{i=-N}^{N}h_i y_{k-i}$