פרק 4. שיטת ליאפונוב לניתוח יציבות

בפרק זה נציג את התורה הבסיסית בנושא ניתוח יציבות של מערכות לא-לינאריות – השיטה מבוססת על עבודתו של המתמטיקאי הרוסי א. ליאפונוב מ-1892.

התיאוריה הבסיסית מתייחסת ליציבות נש״מ של המערכת $\dot{x} = f(x)$, כלומר מערכת מצב, ללא כניסה חיצונית. ניתוח היציבות מבוסס על מציאת ״פונקצית אנרגיה״ חיובית, $V(x)$, שערכה יורד (עם הזמן) לאורך מסלולי המערכת. פונקציה כזו תקרא ״פונקצית ליאפונוב״.

נושאי הפרק:

4.1. יציבות מקומית של נש"מ

אנו חוזרים פה לדיון במערכת n - מימדית (נטולת כניסה) $\dot{x} = f(x), x \in \Re^n$.

נקודת שיווי משקל (נש"מ, equilibrium point) של המערכת $\dot{x} = f(x)$ היא נקודה $x^* \in \Re^n$ במישור המצב המקיימת $f(x^*) = 0$.

נש"מ נקראת גם "נקודה סטציונרית" של המערכת. ברור כי $x(t_0) = x^*$ גורר $\dot{x}(t_0) = 0$, ומכאן (עקב יחידות הפתרון) $x(t) = x^*$ לכל $t \geq t_0$.

מערכת לא לינארית עשוי להיות מספר כלשהו (כולל 0) של נש"מ.

יציבות במובן ליאפונוב: נש"מ x^* תקרא *יציבה* (במובן ליאפונוב) אם

$$\forall\ R>0 \quad \exists\ r>0\ :\ \|x(0)-x^*\| < r \quad \Rightarrow \quad \left\|x(t)-x^*\right\| < R, \quad \forall t>0$$

הערות:

- הנורמה $\|\cdot\|$ היא הנורמה האאוקלידית: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$.

  למעשה ניתן להשתמש גם בכל נורמה אחרת על $\Re^n$.
- הגדרה זו היא הגדרת היציבות החלשה ביותר: המסלול $x(t)$ נדרש "להישאר קרוב" לנש"מ x^*, אך לא בהכרח להתכנס אליה.
- נש"מ שאיננה יציבה לפי הגדרה זו תקרא *בלתי-יציבה* (unstable).

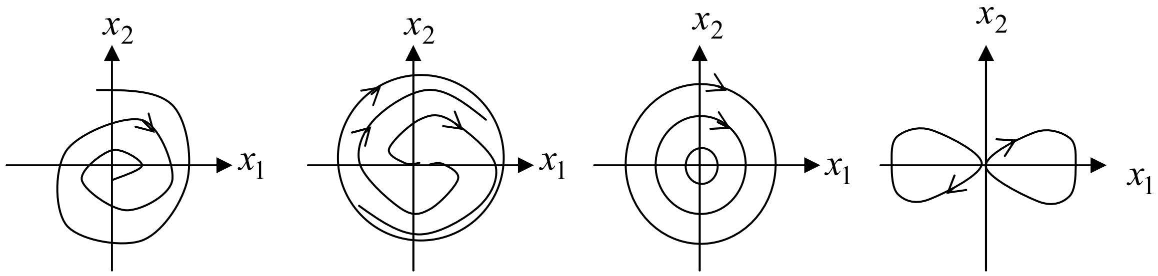
יציבות אסימפטוטית: נש"מ x^* היא *יציבה אסימפטוטית* אם:

א. היא יציבה (במובן ליאפונוב).

ב. קיים $r > 0$ כך ש:

$$\|x(0) - x^*\| < r \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$$

<u>דוגמא:</u> מהי יציבות הנש״מ בראשית לפי תרשימי הפאזה הבאים :



4.2. השיטה הישירה של ליאפונוב

נתבונן במערכת $\dot{x} = f(x)$, בעלת נש"מ x^*.

לשם פשטות הסימון, נניח מעתה כי $x^* = 0$. ההכללה לנש"מ x^* כלשהי ברורה מאליה. כמו כן, על ידי הזזת הקואורדינטות $z = x - x^*$ ניתן לקבל מערכת שקולה $\dot{z} = f(z + z^*) := \hat{f}(z)$, שהיא בעלת נש"מ $z^* = 0$.

נניח מעתה כי $f(x)$ רציפה, ואף רציפה-ליפשיץ באופן מקומי:

$$\forall x \ni L: \quad |f(x) - f(y)| < L \| x - y \| \quad \text{for all } y \text{ in some neigborhood of } x$$

תהי $V(x)$ פונקציה על מרחב המצב. נניח כי $V(x)$ גזירה ברציפות בתחום הרלוונטי.

<u>הגדרת נגזרת לאורך מסלול:</u>

תהי $V(x)$ פונקציה על מרחב המצב. נניח כי $V(x)$ גזירה ברציפות בתחום הרלוונטי.

נגדיר:

$$\dot{V}(x) \doteq \frac{d}{dt} V(x(t)) \Big|_{x(t)=x}$$

כאשר $x(t)$ מסלול כלשהו של המערכת $\dot{x} = f(x)$.

זוהי הנגזרת לפי הזמן של הפונקציה $V(x(t))$, מחושבת בנקודה $x(t) = x \in \Re^n$.

על ידי נוסחת הגזירה להרכב פונקציות נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \cdot f(x(t)) \quad , \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

מכאן:

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{\partial x}\cdot f(x)=$$

$$\equiv\left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x)\end{bmatrix}\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)$$

נדגיש כי $\dot{V}(x)$ היא פונקציה של המצב x, ולא של הזמן. פונקציה זו נקראת "הנגזרת של V לאורך מסלולי המערכת".

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2^2 \\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases},\qquad V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2,\qquad \dot{V}(x)=?$$

המשפט היסודי של תורת ליאפונוב הינו המשפט הבא.

<u>משפט (יציבות מקומית).</u>

תהי $x^*=0$ נש"מ של $\dot{x}=f(x)$. תהי D סביבה פתוחה כלשהי של הראשית.

א. נניח כי $V:D\to R$ פונקציה גזירה ברציפות על D, ומקיימת שם:

(1) $V(0)=0$, $V(x)>0$ עבור $x\neq 0$.	["V חיובית מוגדרת"]

(2) $\dot{V}(x)\leq 0$ (כאשר $\dot{V}$ הוגדרה לעיל).	["$\dot{V}$ שלילית חצי-מוגדרת"]

אזי $x^*=0$ הנה נש"מ <u>יציבה</u> (במובן ליאפונוב).

ב. אם במקום (2) מתקיים:

(2) $\dot{V}(x)<0$ עבור $x\neq 0$	["$\dot{V}$ שלילית מוגדרת"]

אזי $x^*=0$ <u>יציבה אסימפטוטית.</u>

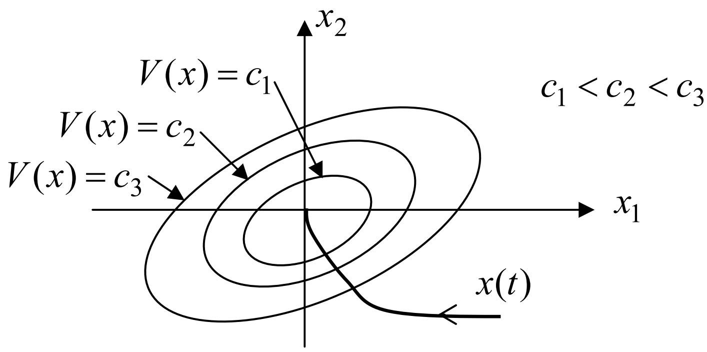
<u>הערה:</u> פונקציה "מוגדרת" חייבת להתאפס בראשית. ניתן לראות כי אכן $\dot{V}(0)=0$ עקב קיום נש"מ בראשית.

הסבר: הוכחה מלאה של המשפט ניתן למצוא ב-[Khalil], והוכחה חלקית ב- [Slotine & Li]. אנו נסתפק פה בהסבר אינטואיטיבי.

נתבונן ב"קוי הגובה" (level sets) של הפונקציה $V(x)$:

$$L_c = \{x : V(x) = c\} \text{ for } c \geq o$$

עבור c קטן, נקבל את התמונה הבאה בקרבת הראשית:



מרציפות, נובע כי קווי הגובה סגורים עבור c מספיק קטן. כמו כן, עבור $c \to 0$ הם מתכנסים לראשית. מכאן נוכל להבין את טענות המשפט:

א. אם $\dot{V}(x) \leq 0$, נובע כי $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$. לפיכך אם $x(0)$ נמצא בתוך "קו גובה" סגור L_c, אזי $x(t)$ לא יוכל לצאת ממנו. מכאן נובעת הטענה לגבי יציבות (במובן ליאפונוב).

ב. אם $\dot{V}(x) < 0$ עבור $x \neq 0$, נקבל כי $\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$ כאשר $V(x(t)) > 0$, וניתן להראות כי $V(x(t)) \to 0$, ומכאן $x(t) \to 0$.

ניתן לראות בפונקצית ליאפונוב מעין "פונקצית אנרגיה" של המערכת, אם כי אין בהכרח קשר לאנרגיה הפיסיקלית.

הקושי העיקרי בשיטת ליאפונוב הוא במציאת פונקצית ליאפונוב מתאימה!

דוגמא 1: נניח מערכת <u>סקלרית</u>: $\dot{x} = f(x) \in R$,

כאשר $f(0)=0$, וכן $x \cdot f(x) < 0$ עבור $x \neq 0$ (כלומר $f(x)$ בעלת סימן הפוך לזה של x). למשל:

$$f(x) = -x,\ -x^2\, sign(x),\ -x^3,\ -\sin(x),\ -x(1-\cos x)$$

נבחר פונקצית ליאפונוב ריבועית: $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. ברור כי $V(0)=0$ ו- $V(x)>0$ עבור $x \neq 0$, כמו כן:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x) = x \cdot f(x) < 0 \quad , \quad x \neq 0$$

מכאן נובעת יציבות אסימפטוטית של הנש"מ $x^* = 0$.

<u>הערה:</u> עבור $f(x) = x^3$, למשל, שיטת הלינאריזציה המקומית אינה מאפשרת להסיק יציבות בדוגמא זו.

<u>דוגמא 2</u> (דוגמא 3.8 מ- [Slotine & Li]):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) - x_1\ x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2\ x_2 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) \end{aligned}$$

נבחר $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

ברור כי $V(0)=0$, כן $V(x)>0$ עבור $x \neq 0$. כמו כן

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\ f_1(x) + 2x_2\ f_2(x) \\ &= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) \end{aligned}$$

לכן $\dot{V}(x)$ עבור $x_1^2 + x_2^2 < 2$, ומכאן כי $x^* = 0$ יציבה אסימפטוטית.

<u>דוגמא 3</u> (דוגמא 3.7 מ- Slotine & Li):

נתבונן שוב במערכת המטוטלת, עם חיכוך ויסקוזי $B>0$. עבור $x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta}$ קיבלנו

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{B}{m}x_2 \end{aligned}$$

כפונקצית ליאפונוב נבחר משיקולים פיסיקליים את פונקצית האנרגיה (המנורמלת):

$$V(x)=\frac{1}{m\ell^2}\left(E_p+E_k\right)=\frac{g}{\ell}\left(1-\cos x_1\right)+\frac{x_2^2}{2}\ \ (\geq 0)$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot f_1(x)+\frac{\partial V}{\partial x_2}f_2(x)\\&=\frac{g}{\ell}\sin(x_1)\ x_2+x_2(-\frac{g}{\ell}\sin(x_1)-\frac{B}{m}x_2)\ =\ -\frac{B}{m}x_2^2\ \leq 0\end{aligned}$$

מכאן נובעת יציבות במובן ליאפונוב, אולם לא יציבות אסימפטוטית (מדוע?).

למעשה הנש"מ $x^*=0$ בדוגמא האחרונה אכן יציבה אסימפטוטית, אולם כדי להסיק זאת לפי המשפט שלמדנו נדרשת פונקצית ליאפונוב אחרת.
בהמשך נראה כיצד ניתן להסיק יציבות אסימפטוטית גם בעזרת הפונקציה דלעיל!

קיום פונקצית ליאפונוב: שאלה מתבקשת היא האם עבור כל נש"מ יציבה (אסימפטוטית) ניתן למצוא פונקצית ליאפונוב? התשובה לכך היא חיובית!
אולם לרוע המזל, ההוכחה של עובדה זו אינה קונסטרוקטיבית, כלומר אינה מראה לנו כיצד ניתן למצוא פונקציה כזו לכל נש"מ יציבה.

4.3 לינאריזציה מקומית – תזכורת

דרך נוספת לקביעת יציבות מקומית של נקודת שיווי משקל הינה בעזרת לינאריזציה של המערכת מסביב לנש"מ. שיטה זו נקראת גם "השיטה העקיפה של ליאפונוב".

נתבונן ראשית במערכת הלינארית $\dot{x} = Ax$. מובן כי $x^* = 0$ היא נש"מ (האם היא יחידה?). כזכור, מתקיים המשפט הבא:

<u>**משפט:**</u> (יציבות אסימפטוטית)
הנש"מ $x^* = 0$ של המערכת הלינארית $\dot{x} = Ax$ יציבה אסימפטוטית אם ורק אם $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ לכל i.

<u>ההוכחה</u> היא ישירות מתוך הפתרון המפורש $x(t) = e^{At}\, x(0)\,, \qquad t \geq 0$
כאשר

$$e^{At} := I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

על ידי שימוש בצורת ג'ורדן של A ניתן להראות כי: $e^{At} = \sum_{i=1}^{r} B_i(t) e^{\lambda_i t}$,

כאשר $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ הערכים העצמיים השונים של A, ואילו $B_i(t)$ פולינום (שדרגתו לפי ריבוי הערך העצמי). קל לראות כי בתנאי המשפט $e^{At} \to 0$, וכן כי איברי מטריצה זו חסומים. טענת היציבות נובעת מיידית.

נתבונן עתה במערכת $\dot{x} = f(x)$, נניח כי x^* נש"מ, כלומר $f(x^*) = 0$, וכן כי f בעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת x^*.

עקב $f(x^*) = 0$, פיתוח טיילור מסדר ראשון של $f(x)$ מסביב ל- x^* נותן:

$$f(x) = A \cdot (x - x^*) + \text{ higher powers of } (x - x^*)$$

כאשר

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ,..., & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & ,..., & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x = x^*}$$

היא מטריצת היעקוביאן של f בנקודה x^*.

<u>**משפט:**</u> יהיו $\lambda_1,...,\lambda_n$ הע"ע של המטריצה A.

(1) הנש"מ x^* הינה <u>יציבה אסמפטוטית</u> אם $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ לכל i.

(2) הנש"מ x^* בלתי-יציבה אם $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ עבור i כלשהו.

<u>**הערות:**</u>

1. את המשפט ניתן להוכיח בעזרת השיטה הישירה של ליאפונוב (המשפט בסעיף הקודם), או ישירות משיקולי רציפות הפתרונות. לא נכנס פה להוכחה.
2. במקרה הגבולי שבו $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ עבור i כלשהו (בעוד כל השאר שליליים) לא ניתן לקבוע היציבות בעזרת לינאריזציה.

<u>**חסרונות השיטה:**</u>

1. חישוב A ומציאת λ_i עשויים להיות מסובכים.
2. אין ערובה לגבי גודל תחום ההתכנסות או תכונות גלובליות.

4.4. יציבות גלובלית ויציבות אקספוננציאלית

א. התכנסות גלובלית

ההגדרות עד כה היו בעלות אופי מקומי, כלומר הסתפקו באפיון התנהגות המערכת בסיסה קרובה של הנש״מ. מובן שקיים עניין בתכונות יציבות המתקיימות לכל תנאי התחלה.

<u>הגדרה:</u> נש״מ x^* תקרא <u>יציבה אסימפטוטית גלובלית</u> אם ההתכנסות $x(t)\to x^*$ מובטחת לכל תנאי התחלה $x(0)\in R^n$.

<u>הערות:</u>

א. ברור כי נש״מ יציבה גלובלית היא יחידה.

ב. במערכת לינארית, יציבות מקומית מתלכדת עם יציבות גלובלית.

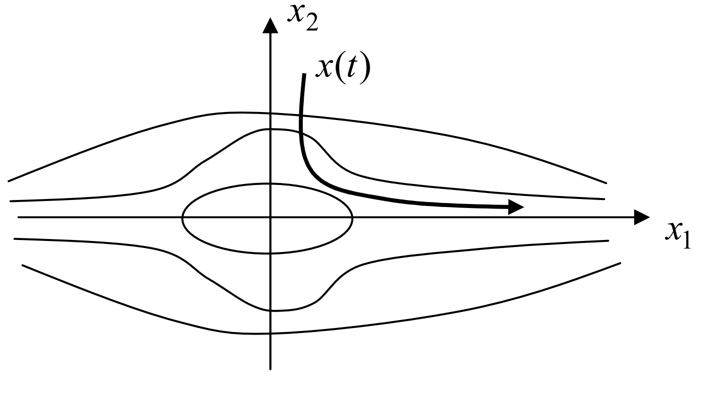
<u>משפט (יציבות גלובלית).</u>

נניח כי $V(x)$ מוגדרת על $\mathbf{R}^n$, כולו, בעלת נגזרות רציפות ומקיימת:

1. $V(0)=0$, $V(x)>0$ לכל $x\neq 0$.
2. ׳ $\dot{V}(x)<0$ לכל $x\neq 0$
3. $V(x)\to\infty$ כאשר $\|x\|\to\infty$.

אזי הנש״מ $x^*=0$ יציבה אסימפטוטית <u>גלובלית.</u>

<u>הערה:</u> דרישה (3) נקראת ״אי-חסימות רדיאלית״. דרישה זו חיונית לצורך יציבות גלובלית, והיא מבטיחה כי ״קוי הגובה״ של $V(x)$ יהיו סגורים. זאת כדי למנוע את המצב המודגם בציור.



דוגמא:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

"ננסה":

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 .$$
$$\Rightarrow \dot{V}(x) = 2x_1 f_1(x) + 2x_2 f_2(x) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

ומתקיימים תנאי המשפט ליציבות גלובלית של $x^* = 0$!

ב. יציבות אקספוננציאלית

בהגדרה של יציבות אסימפטוטית אין כל דרישה לגבי קצב ההתכנסות לנש"מ. נוסיף עתה דרישה לקצב התכנסות אקספוננציאלי.

הגדרה: נש"מ x^* היא יציבה אקספוננציאלית אם קיימים מספרים A_0 , $\lambda > 0$ כך שעבור $r > 0$ כלשהו (מספיק קטן) ועבור כל $x(0)$ המקיים $\| x(0) - x^* \| < r$, נקבל:

$$\|x(t) - x^*\| \le A_0 \| x(0) - x^* \| \, e^{-\lambda t} \qquad , \quad t \ge 0$$

x^* היא יציבה אקספוננציאלית גלובלית אם החסם האקספוננציאלי על $x(t)$ מתקיים לכל $x(0) \in R^n$.

דוגמאות:

1. המערכת הלינארית המוכרת: $\dot{x} = -x$

נותנת: $x(t) = x(0)e^{-t}$

כלומר: $|x(t)| = |x(0)|e^{-t}$

ההתכנסות ל- $x^* = 0$ היא כמובן אקספוננציאלית. למעשה, ניתן בקלות להראות כי במערכת לינארית, יציבות אסימפטוטית גוררת יציבות אקספוננציאלית.

2. המערכת: $\dot{x} = -\left(1 + \sin^2 x\right) x$

הפתרון המתקבל:

$$x(t)=x(0)\exp[-\int_0^t (1+\sin^2(x(r))\,dr)]$$

$$\Rightarrow \quad |x(t)| \le |x(0)|e^{-t}$$

וגם פה קיימת יציבות אקספוננציאלית.

3. $\dot{x} = -x^2 sign(x)$

ניתן לוודא כי $x^* = 0$ נש"מ יציבה אסימפטוטית.

עבור $x_0 > 0$ מתקבל הפתרון:

$$x(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{x_0}} \quad , \quad t \ge 0$$

מהי המסקנה לגבי יציבות אקספוננציאלית?

<u>**משפט (יציבות אקספוננציאלית).**</u>

1. תהי $V(x)$ מוגדרת וגזירה ברציפות בסביבה D של הראשית, ונניח כי קיימים קבועים חיוביים C_1 ו- α כך ש:

$$c_1\|x\|^\alpha \le V(x) \le c_2\|x\|^\alpha, \qquad \|\dot{V}(x)\| \le -c_3\|x\|^\alpha$$

לכל $x \in D$. אזי $x^* = 0$ יציבה אקספוננציאלית.

2. באם הנ"ל מתקיים לכל $x \in \Re^n$, אזי $x^* = 0$ יציבה אקספוננציאלית <u>גלובלית</u>.

4.5. הערכת תחום המשיכה

גם כאשר נש"מ אינה יציבה גלובלית, קיימת חשיבות להערכת "תחום המשיכה" שלה, דהיינו אוסף הנקודות במרחב המצב מהן קיימת התכנסות לנש"מ זו. מסתבר כי תנאי היציבות הרגילים, כתוספת דרישה לגבי "קוי הגובה" מאפשרים להעריך את תחום המשיכה.

__הגדרה__: תהי x^* נש"מ. __תחום המשיכה__ של x^* הינה הקבוצה המכסימלית Ω כך ש: $x(0)\in\Omega$ גורר $\lim_{t\to\infty} x(t)=x^*$. כל תת-קבוצה של Ω תקרא __תחום משיכה__ של x^*.

__משפט__: (תחום משיכה של נש"מ יציבה).

נניח כי מתקיימים תנאי משפט ליאפונוב ליציבות אסימפטוטית (מקומית) בסביבה D כלשהי של הראשית.

יהי $c>0$ (רצוי גדול ככל האפשר) כך שמתקיים:

$$\Omega_c := \{x:\mathbf{R}^n : V(x)<c\} \subset D$$

אזי Ω_c הינה תחום משיכה של $x^*=0$.

__הסבר:__ התנאי לגבי Ω_c הוא בעל משמעות דומה לתנאי הנדרש ליציבות גלובלית – הוא מבטיח כי $x(0)$ נמצא בתוך "קו גובה" סגור ולכן לא יוכל "לברוח" החוצה.

__דוגמא:__ נתבונן שוב בדוגמא 2 מסעיף ב'. מצאנו שם:

$$V(x)=x_1^2+x_2^2$$
$$\dot{V}(x)=2(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2-2)$$

תנאי המשפט מתקיימים עבור $\Omega_c = D = \{x:\|x\|<\sqrt{2}\}$, ולכן זהו תחום משיכה של $x^*=0$.

4.6. יציבות אסימפטוטית לפי עקרון האינווריאנטיות

לעיתים קל יחסית למצוא פונקציית ליאפונוב אשר מקיימת אי-שוויון חלש לגבי הנגזרת, כלומר $\dot{V}(x) \le 0$ אך לא בהכרח $\dot{V}(x) < 0$. לפי המשפטים שלמדנו עד כה לא ניתן להסיק מכך יציבות אסימפטוטית (אלא רק יציבות במובן ליאפונוב). האם ניתן לשפר זאת?

התוצאה שנביא כעת היא מקרה פרטי של תוצאה כללית ועמוקה, הנקראת "משפט הקבוצה האינווריאנטית של La-Salle". תוצאה זו תוזכר בהמשך.

משפט (יציבות אסימפטוטית לפי עקרון האינווריאנטיות).
תהי $x^* = 0$ נש"מ של $\dot{x} = f(x)$, ותהי $V(x)$ פונקציית ליאפונוב המקיימת בסביבה כלשהי D של הראשית את הדרישות הרגילות ליציבות (במובן ליאפונוב):

(1) $V(0)=0$, $V(x)>0$ עבור $x \neq 0$.

(2) $\dot{V}(x) \le 0$.

בנוסף, נניח כי הקבוצה $D_0 = \{x \in D \,:\, \dot{V}(x) = 0\}$ אינה מכילה מסלול שלם של המערכת פרט למסלול הטריוויאלי ($x(t) \equiv 0$). אזי $x^* = 0$ יציבה אסימפטוטית.
יתר על כן, כל רכיב קשיר של קבוצה מהצורה $\Omega_c := \{x : V(x) < c\}$ אשר מוכל (כולו) ב- D הינה תחום משיכה של הראשית.

הערה: נובע, בפרט, כי אם תנאי המשפט מתקיימים עם $D = \Re^n$ וכן כי $V(x)$ בלתי חסומה רדיאלית, אזי הראשית יציבה אסימפטוטית גלובלית.

<u>דוגמא</u> : נחזור לדוגמת מטוטלת. עבור פונקציית האנרגיה

$$V(x)=\frac{g}{\ell}\left(1-\cos x_1\right)+\frac{x_2^2}{2}$$

שהיא חיובית בסביבת הראשית, קיבלנו כי $\dot{V}(x)=-\frac{B}{m}x_2^2\le 0$. מכאן כי $D_0=\{x\in D\ :\ x_2=0\}$. נתבונן בנקודה $x\neq 0$ בקבוצה זו. בנקודה כזו מתקיים :

$$\dot{x}_2=-\frac{g}{\ell}\sin x_1-\frac{B}{m}x_2=-\frac{g}{\ell}\sin x_1\neq 0$$

מכאן כי מסלול המתחיל בנקודה זו אינו נשאר בקבוצה D_0, ולפי המשפט נובעת יציבות אסימפטוטית של הראשית.

להערכת תחום המשיכה, נבחר $D=\{x\ :\ |x_1|<\pi\}$ (מדוע לא ניתן להכליל את $|x_1|=\pi$?). ניתן לראות כי הקבוצה Ω_c מוכלת ב- D עבור $c=2g/\ell$, ולכן מהווה תחום משיכה.

4.7. משפטי אי-יציבות

חוסר יכולת למצוא פונקצית ליאפונוב אינו מהווה כמובן הוכחה לכן שנש"מ אינה יציבה.
דרך אחת לבסס אי-יציבות הינה באמצעות שיטת הליניאריזציה. דרך אחרת הינה באמצעות תוצאות כדוגמת המשפט הבא.

משפט (אי-יציבות).
נניח כי קיימת פונקציה $V(x)$ גזירה ברציפות בסביבה כלשהי של הראשית, המקיימת שם :

1. $V(0)=0$, $V(x)>0$ עבור $x \neq 0$.
2. $\dot{V}(x)>0$ עבור $x \neq 0$.

אזי הנש"מ $x^*=0$ אינה יציבה.

הרחבה : למעשה ניתן להסיק אי-יציבות בהנחות חלשות יותר.

- במקום (1), ניתן לדרוש קיום נקודות x קרובות כרצוננו לראשית שעבורן $V(x)>0$.
- במקום (2) נדרוש כי $\dot{V}(x)>0$ רק בנקודות שבהן $V(x)>0$.

המסקנה נשארת זהה !

4.8. פונקצית ליאפונוב למערכות לינאריות

נתבונן במערכת הלינארית:

$$\dot{x} = Ax$$

נניח כי A "יציבה": $\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\}<0$, כלומר הראשית יציבה אסימפטוטית. מהי פונקצית ליאפונוב מתאימה למערכת זו?

בסעיף זה נראה כיצד למצוא פונקציה ליאפונוב מתאימה שהיא <u>ריבועית</u> במשתני המצב.

א. תבניות ריבועיות ומטריצות חיוביות

תהי $P=\left(p_{ij}\right)$ היא מטריצה ממשית בגודל $n\times n$.

המטריצה P מגדירה <u>תבנית ריבועית</u> בוקטור המשתנים $x=\left(x_1,...,x_n\right)^T$, כלהלן:

$$f(x)=x^T Px=\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}x_i x_j$$

למשל: $f(x)=x_1^2+3x_1x_2+5x_2^2$ ...

כל תבנית ריבועית ניתן להגדיר באמצעות מטריצה <u>סימטרית:</u> $\left(P=P^T\right)$. אם P אינה סימטרית, ניתן להחליפה במטריצה הסימטרית $\widetilde{P}=\frac{1}{2}(P+P^T)$ אשר נותנת את אותה תבנית ריבועית.

<u>**הגדרה:**</u> מטריצה P תקרא חיובית מוגדרת (ונסמן $P>0$) אם $\forall x\neq 0$, $x^T Px>0$.

<u>**משפט 1 (אלגברה לינ.):**</u> עבור מטריצה <u>סימטרית</u> P, התנאים הבאים הינם שקולים:

1. $P>0$
2. כל הערכים העצמיים הינם חיוביים: $i=1,...,n$, $\lambda_i(P)>0$.
   (נזכיר כי למטריצה סימטרית הע"ע תמיד ממשיים).
3. כל המינורים הראשיים של P הינם חיוביים: $m=1,...,n$, $\det\left(P_{1:m,1:m}\right)>0$

<u>דוגמא 1:</u> עבור מטריצה אלכסונית, $P=\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, נקבל

$$x^T Px = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2$$

וברור מההגדרה כי $P>0$ אם $p_2 , p_1 > 0$.

מכיוון ש- p_1 , p_2 הם הערכים העצמיים, מתקיימת טענת המשפט.

<u>דוגמא 2:</u> מהם ערכי α שעבורם המטריצה הבאה חיובית מוגדרת:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} .$$

הערכים העצמיים הם: $\lambda_{1,2}=1\pm\alpha$, לכן $P>0$ עבור $-1<\alpha<1$.

<u>הערה:</u> עבור שתי מטריצות סימטריות P_1 ו- P_2, הסימון $P_1>P_2$ פירושו כי $P_1-P_2>0$.

<u>ב. מציאת פונקצית ליאפונוב</u> (עבור $\dot{x}=Ax$)

ננסה פונקצית ליאפונוב ריבועית:

$$V(x)=x^T Px$$

נזכור כי להוכחת יציבות אסמפטוטית נדרשים שני התנאים:

(1) $V(x)>0$ (עבור $x\neq 0$).

(2) $\dot{V}(x)<0$ (עבור $x\neq 0$).

לקבלת $V(x)>0$ נדרוש כי P סימטרית וחיובית מוגדרת: $P>0$.

לגבי התנאי השני, נחשב את $\dot{V}$:

$$\dot{V}(x) \doteq \frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x)=\left(x^T P + x^T P^T\right)Ax = \\ = x^T\left(A^T P + PA\right)x$$

נסמן: $A^T P + PA = -Q$.

אזי $\dot{V}(x) = -x^T Q x$

וכדי לקיים את דרישה (2) נדרוש כי $Q > 0$.

מטרתנו, אם כן, למצוא $P > 0$ שתבטיח גם $Q > 0$.

מסתבר שלצורך זה נוח יותר להתחיל דווקא מ- Q מסוימת, ולמצוא את P המתאימה.

<u>משפט:</u> (משוואת ליאפונוב).

נניח כי A מטריצה יציבה, כלומר $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ לכל i.

תהי $Q > 0$ כלשהי, ונתבונן במשוואה:

$$A^T P + PA = -Q \qquad (*)$$

אזי:

(1) למשוואה זו פתרון P סימטרי יחיד.

(2) פתרון זה הינו חיובי מוגדר ($P > 0$).

(3) פתרון $P > 0$ קיים אם ורק אם A יציבה.

המשוואה (*) נקראת משוואת ליאפונוב. ניתן לראות כי זוהי משוואה <u>לינארית</u> באיברי המטריצה P.

<u>לסיכום:</u> פונקצית ליאפונוב למערכת $\dot{x} = Ax$ ניתנת לבחירה כך:

(1) נבחר מטריצה $Q > 0$ כלשהי.

(2) נפתור את משוואת ליאפונוב: $A^T P + PA = -Q$.

נקבל פתרון $P > 0$ אם (ורק אם) A יציבה.

(3) נבחר. $V(x) = x^T P x$.

פונקציה זו מקיימת $V(x) > 0$, וכן $\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0$ עבור $x \neq 0$.

דוגמא: ([Slotine (3.18)])

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$$

נבחר $Q=I$. המשוואה המתקבלת :

$$A^T P+PA=-I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

מכאן נקבל 3 משוואות לניאריות שפתרונן : $p_3=\frac{1}{16}$, $p_2=\frac{1}{16}$, $p_1=\frac{5}{16}$, כלומר :

$$P=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ניתן לוודא כי $P>0$, ובהתאם A יציבה.

4.9 מציאת פונקציית ליאפונוב

נחזור עתה לבעיה של מציאת פונקצית ליאפונוב למערכת הלא לינארית: $\dot{x} = f(x)$.
במקרה זה לא קיימת שיטה כללית שהצלחתה מובטחת. נתאר בקצרה מספר גישות אפשריות.

א. פונקציות ריבועיות

נקודת התחלה אפשרית היא התבנית הריבועית:

$$V(x) = x^T P x$$

כאשר $P > 0$. בפרט ניתן להתחיל מהמקרה האלכסוני

$$V(x) = \sum \alpha_i x_i^2 \qquad , \qquad \alpha_i > 0$$

יש לבדוק קיום P המקיים $\dot{V}(x) = 2x^T P f(x) < 0$.

דרך אחת למצוא P מתאימה היא באמצעות לינאריזציה.

עבור $$A \doteq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

נגדיר $Q > 0$ ונבחר P כפתרון של $A^T P + PA = -Q$.

גישה זו תצליח תמיד כאשר A יציבה, אולם היא כרוכה בחישוב רב ולא בהכרח מבטיחה תחום התכנסות מיטבי.

ב. שיטת קרקובסקי:

בגרסה הבסיסית של שיטה זו, הפונקציה המוצעת היא:

$$V(x) = f(x)^T f(x)$$

נגדיר $$A(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad , \quad F(x)=A(x)+A(x)^T$$

הטענה הבסיסית היא כי אם $F(0)<0$, אזי $V(x)$ פונקצית ליאפונוב, ו- $x^*=0$ יציבה אסימפטוטית.

יתר על כן, אם $F(x)<0$ ב"כדור" סביב הראשית, אזי כדור זה הינו תחום משיכה של הראשית.

ניתן להכליל טענה זו גם למקרה שבו קיימת מטריצה $P>0$ כלשהי כך ש-

$$A(x)^T P+PA(x)<0$$

בסביבת הראשית. פרטים נוספים מצויים בספרי הלימוד.

ג. הסתמכות על שיקולים פיסיקליים

לעתים ניתן לגזור פונקצית ליאפונוב מתוך "הבנה פיסיקלית" של הבעיה – דוגמא בולטת היא פונקצית אנרגיה במערכות מכניות ואחרות (ראה דוגמת המטוטלת).

נדגים עתה גישה זו עבור מערכת מורכבת יחסית, של זרוע רובוטית.

ד. ניתוח יציבות של בקר לזרוע רובוטית בשיטת ליאפונוב

.

זרוע רובוטית היא התקן מכני בעל m מפרקים (לינאריים או סיבוביים), היוצרים "שרשרת מכנית פתוחה".

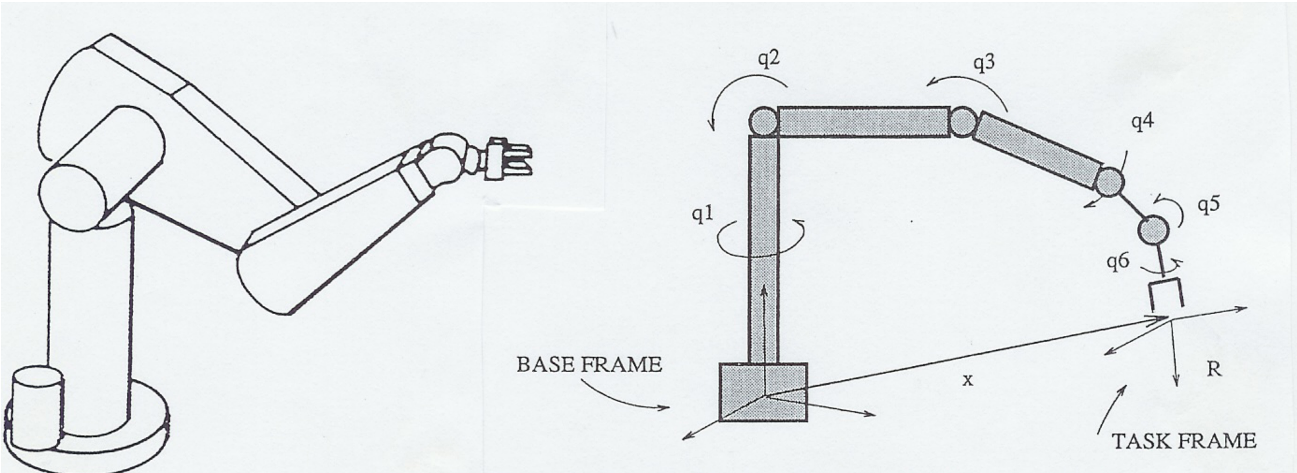


Figure 76.2 Configuration space and task space variables.

לכל מפרק i צמודה "קואורדינטה מוכללת" q_i המתארת את הזוית או התזוזה הליניארית שלו (בהתאם לסוג המפרק).

כל מפרק מונע על ידי מנוע מתאים, היוצר "כוח מוכלל" u_i (מומנט או כוח, בהתאם לסוג המפרק). הוקטור q מכונה לעיתים "וקטור הקונפיגורציה". וקטור זה קובע, בפרט, את המיקום והאוריאנטציה של נקודת הקצה.

המודל הדינמי

המשוואות הדינמיות המתקבלות הן בעלות הצורה הכללית:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u \qquad (*)$$

כאשר:

- q הוא וקטור הקואורדינטות המוכללות, או "וקטור הקונפיגורציה" $q=(q_1,\dots,q_m)^T$.

  $\dot{q}$ ו- $\ddot{q}$ הם, בהתאמה, וקטורי המהירות והתאוצה.
- u הינו ווקטור הכוחות המוכללים: $u=(u_1,\dots,u_n)^T$.
- $M(q)$ הינה מטריצת האנרציה, כמימד $m\times m$. כללית M תלויה בקונפיגורציה q.

  ידוע כי $M(q)>0$ (סימטרית וחיובית מוגדרת) לכל q.
- האיבר $C\dot{q}$ מתאר את הכוחות הצנטריפוגליים וכוחות קוריוליס הפועלים עקב תנועת הגוף. משיקולים פיסיקליים ידוע כי $C+C^T=\dot{M}(q)$.
- $g(q)$ הוא וקטור הגרוויטציה.

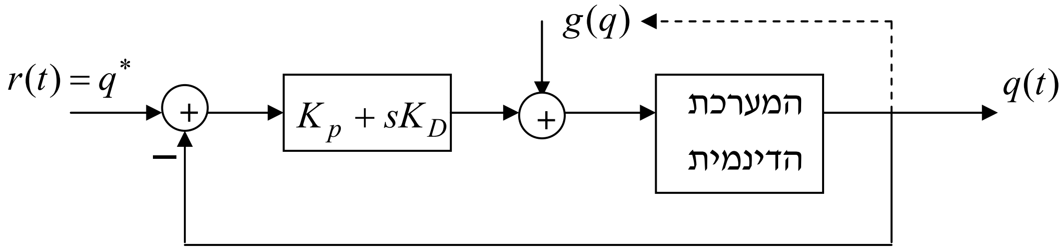
לרובוט אופייני קיימות 6 דרגות חופש $(m=6)$. המטריצות במודל הדינמי עשויות להיות מסובכות למדי, אולם הן ניתנות לחישוב סימבולי באמצעות מחשב.

__בקרת PD__: בקר נפוץ לזרועות רובוטיות הינו בקר פשוט מסוג PD. נראה כי בתוספת פיצוי על כוחות הגרוויטציה, בקר כזה מייצב את המערכת סביב נקודה רצויה.

הבקר המוצע הינו:

$$u=K_p(r-q)+K_D(\dot{r}-\dot{q})+g(q)$$

כאשר K_p ו- K_D מטריצות ריבועיות וסימטריות. תאור סכמטי של הבקר:



<u>ניתוח יציבות</u>

נראה כי עבור $r(t)\equiv q^*$ נקבל $q(t)\to q^*$, כלומר המערכת מתייצבת על הנקודה $q=q^*$, בתנאי ש- $K_p>0$ וכן $K_D>0$.

משוואות הרובוט עם הבקר (עבור $r(t)=q^*$ קבוע) הינן:

$$M\ddot{q}+C\dot{q}+g=u=K_p\left(q^*-q\right)+K_D(-\dot{q})+g$$

לאחר צמצום g והעברת אגפים:

$$M\ddot{q}=(C+K_D)\dot{q}+K_p\left(q-q^*\right)=0$$

נבחר משתני מצב: $x=(q;\dot{q})$. ניתן כמובן לכתוב בקלות את משוואות המצב, שהן מסדר $2m$. הנקודה $x^*=\left(q^*;0\right)$ הינה נש"מ. נדרש להראות כי היא יציבה אסימפטוטית.

נבחר כמועמדת לפונקצית ליאפונוב את פונקצית האנרגיה הבאה:

$$V(x)=\frac{1}{2}\left[q^TM(q)\dot{q}+\left(q-q^*\right)K_p\left(q-q^*\right)\right]$$

האיבר הראשון הוא האנרגיה הקינטית, והשני מבטא "אנרגיית קפיץ" ביחס לקבוע הבקר K_p. אנרגיה פוטנציאלית לא מופיעה כיוון שביטלנו את השפעתה על ידי הבקר.

נשים לב כי עבור $K_p>0$ נקבל $V(x)>0$ לכל $x\neq(q^*;0)$. חישוב הנגזרת נותן:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=\dot{q}^TM\,\ddot{q}+\frac{1}{2}\dot{q}^TM(q)\dot{q}+\dot{q}^TK_p\left(q-q^*\right)\\&=\dot{q}^T\left[-(C+K_D)\dot{q}-K_p\left(q-q^*\right)\right]+\frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}\dot{q}+\dot{q}^TK_p\left(q-q^*\right)\\&=-\dot{q}K_D\,\dot{q}-\frac{1}{2}\dot{q}\left(C+C^T-\dot{M}\right)\dot{q}\;=-\dot{q}K_D\dot{q}\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מתכונת המטריצה C.

באם נבחר עתה $K_D > 0$ קיבלנו $\dot{V}(x) \le 0$. כדי להראות יציבות אסימפטוטית, נעזר בהרחבת משפט ליאפונוב לפי עקרון האינווריאנטיות.

ברור כי $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. נראה כי כל מסלול המתחיל בנקודה $x = (q;0)$ (פרט לנקודה $q = q^*$) חורג מהקבוצה $\{\dot{q} = 0\}$. ואמנם קל לראות כי $\ddot{q} \neq 0$ לכל נקודה כנ״ל, כלומר $\dot{q}$ אינו נשאר 0.

מכאן כי $x^* = (q^*;0)$ היא נש״מ יציבה אסימפטוטית.

<u>**הערה:**</u> הבקר שהצענו הסתמך על ביטול מדויק של איבר הגרוויטציה $g(q)$, בפועל ביטול כזה עשוי להיות קשה לביצוע ולקבלת שגיאת מצב מתמיד 0 נדרש להוסיף איבר אינטגרציה לבקר (בקר PID). ניתוח היציבות למקרה זה מסובך יותר.

4.10 יציבות כניסה-למצב

מושגי היציבות בהם התמקדנו עד כה מתיחסים ליציבות מערכת נטולת כניסה בלבד. נתאר עתה בקצרה מושגים של יציבות למערכות בעלות כניסה, ואת הקשר ליציבות ליאפונוב.

נתבונן במערכת $\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \Re^n, u \in \Re^m$.

נניח כי $f(x,u)$ רציפה (ליפשיץ-מקומית) במשתנים x ו- u, וכי אות הכניסה $u(t)$ חסום ורציף-למקוטעין.

נתון כי עבור $u = 0$, למערכת $\dot{x} = f(x,0)$ קיימת נש"מ בראשית: 0 $f(0,0) = 0$.

הגדרה: המערכת $\dot{x} = f(x,u)$ הינה יציבה במובן כניסה-למצב אם:

א. ת"ה $x(0) = x_0$ ולכל כניסה חסומה u, הפתרון $x(t)$ קיים לכל $t > 0$

ב. $$\| x(t) \| \le \beta(\| x_0 \|, t) + \gamma\left(\sup_{t_0 \le s \le t} \| u(s) \| \right)$$

עבור פונקציות β, γ אי-שליליות המקיימות:

* $\gamma(y)$ היא פונקציה "מסוג K" (עולה ב- $y \ge 0$, עם $\gamma(0) = 0$)
* $\beta(y,t)$ עולה ב- y ויורדת ב- t, עם $\lim_{t \to \infty} \beta(y,t) = 0$ לכל y.

משמעות ההגדרה:

עבור $u \equiv 0$, נקבל יציבות אסימפטוטית (כלומר, יציבות ביחס לתנאי התחלה) של הנש"מ בראשית.

עבור $x_0 = 0$, נקבל יציבות מסוג BIBO: כניסה חסומה מובילה ליציאה חסומה (בכל קטע זמן).

השוואה למערכת לינארית: נתבונן במערכת לינארית: $\dot{x} = Ax + Bu$

כאשר A יציבה-הורוביץ (ע"ע בעלי חלק ממשי שלילי ממש). כזכור זהו תנאי מספיק והכרחי ליציבות אסימפטוטית של הראשית במערכת $\dot{x} = Ax$, וגם ליציבות BIBO.

צרוף של שתי תכונות אלה (לפי תכונת הסופרפוזיציה של מערכת לינארית) גורר יציבות במובן כניסה-למצב. לפיכך, כל סוגי יציבות אלה שקולים במערכת לינארית.

נביא שתי תוצאות הקושרות את יציבות אסימפטוטית עם יציבות כניסה-מצב במערכות לא לינאריות. המשפט הבא נותן תנאי דמוי-ליאפונוב ליציבות כניסה-מצב :

<u>משפט 1</u> : תהי $V(x)$ פונקציית ליאפונוב על $\Re^n$, בלתי חסומה רדיאלית, כך שמתקיים :

$$\nabla V(x) \cdot f(x,u) \le -W(x), \quad \forall (x,u):\ \| x \| \ge \rho(\| u \|)$$

כאשר $\rho(y)$ פונקציה מסוג K, ואילו $W(x)$ פונקציה חיובית מוגדרת.

אזי המערכת יציבה במובן כניסה למצב.

ניתן לראות כי התנאי דומה לתנאי ליאפונוב ליציבות אסימפטוטית, כאשר $\dot{V}(x)$ נדרש להיות שלילי "באופן אחיד" המשתנה הכניסה u.

התוצאה הבאה מראה כי ניתן להסיק יציבות כניסה-מצב מתוך יציבות "מספיק חזקה" של הנש"מ בראשית, בתנאי שפונקציית המערכת f אינה "תלולה" מדי.

<u>משפט 2</u> : נניח כי $f(x,u)$ רציפה-ליפשיץ באופן גלובלי במשתנים x,u :

$$| f(x,u) - f(x',u') | \le L_1 \| x - x' \| + L_2 \| u - u' \|$$

וכי למערכת $\dot{x} = f(x,0)$ נש"נ יציבה אקספוננציאלית וגלובלית בראשית.

אזי המערכת $\dot{x} = f(x,u)$ יציבה במובן כניסה-למצב.

קל לראות כי תנאי רציפות-ליפשיץ הינו חיוני פה : למשל, המערכת הסקלרית $\dot{x} = -3x + xu$ אינה יציבה במובן מצב-ליציאה.

4.11 מערכות בזמן בדיד

התורה שהצגנו עד כה הינה למערכות בזמן רציף. ניתן לפתח תוצאות דומות גם למערכות בזמן בדיד, כאשר הפרטים הטכניים פה לרוב פשוטים יותר.

נתבונן במערכת מצב בזמן בדיד:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k \ge 0$$

גם פה נחפש "פונקצית ליאפונוב" $V(x)$, המקבלת מינימום בנש"מ $(x^* = 0)$, ויורדת לאורך מסלולי המערכת.

הדרישה הראשונה זהה לזמן רציף: $V(x) > 0$ עבור $x \ne 0$, $V(0) = 0$.

לקבלת הדרישה השניה, נשים לב כי:

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) = V(f(x_k)) - V(x_k) \doteq \Delta V(x_k)$$

לפיכך, את הדרישה $\dot{V}(x) \le 0$ בזמן רציף נחליף בדרישה $\Delta V(x) \le 0$.

התוצאות שקיבלנו בזמן רציף נשארות בעינן עם החלפה זו.

נעיר עוד כי משוואות ליאפונוב למערכות לינאריות בזמן רציף: $A^T P + PA = -Q$ מוחלפת בזמן בדיד עם המשוואה הבאה: $A^T PA - P = -Q$.